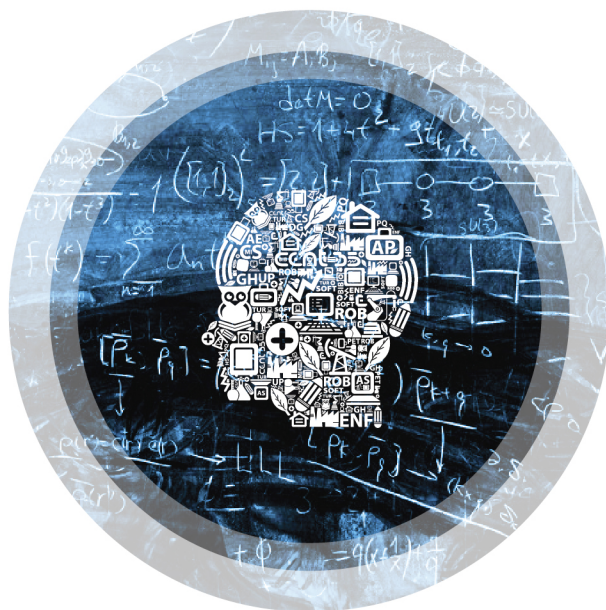




cent 33

PROF. JOSÉ JULIÁN GODOY

Cuadernillo de
MATEMÁTICA

INTRODUCCIÓN
a los ESTUDIOS
SUPERIORES
TÉCNICOS

I E S T E C • 2 0 2 0

Índice

<i>Presentación.....</i>	<i>3</i>
<i>Números Reales.....</i>	<i>5</i>
<i>Propiedades de los Números Reales.....</i>	<i>7</i>
<i>Regla de Signos.....</i>	<i>9</i>
<i>Potenciación.....</i>	<i>10</i>
<i>Radicación.....</i>	<i>11</i>
<i>Operaciones con Números Racionales.....</i>	<i>13</i>
<i>Operaciones con Fracciones y Números Decimales.....</i>	<i>14</i>
<i>Operaciones Combinadas.....</i>	<i>17</i>
<i>Ejercitación Propuesta.....</i>	<i>20</i>
<i>Razones y Proporciones.....</i>	<i>23</i>
<i>Ejercitación Propuesta.....</i>	<i>25</i>
<i>Porcentaje o tanto por ciento.....</i>	<i>26</i>
<i>Ejercitación Propuesta</i>	<i>27</i>
<i>Aplicaciones Comerciales del Porcentaje.....</i>	<i>29</i>
<i>Regla de Tres Simple.....</i>	<i>30</i>
<i>Ejercitación Propuesta</i>	<i>33</i>
<i>Gráficos estadísticos</i>	<i>34</i>
<i>Lectura y análisis de gráficos estadísticos</i>	<i>37</i>
<i>Ejercitación propuesta.....</i>	<i>38</i>
<i>¿Algunos gráficos son mentirosos?.....</i>	<i>42</i>
<i>La estadística en los medios.....</i>	<i>43</i>
 <i>Bibliografía.....</i>	 <i>44</i>

Presentación

La matemática es una ciencia que pertenece, al igual que la lógica, al grupo de las ciencias formales. Su objeto y entes son ideales, a diferencia de otras ciencias que tienen objetos concretos con los que se puede experimentar. A partir de axiomas y siguiendo razonamientos lógicos, las matemáticas analizan estructuras, magnitudes y vínculos de estos entes abstractos, permitiendo detectar ciertos patrones, formulando conjeturas y estableciendo definiciones a las que se llegan a través de procesos deductivos.

Con esto queremos aclarar que, para conocer y aprender la matemática, sólo necesitamos el uso del razonamiento, ésta es la única herramienta que debemos considerar. Por ello, estudiar la matemática significa ejercitar y practicar haciendo ejercicio del proceso lógico que eso implica.

Casi todas las actividades humanas tienen algún tipo de vinculación con las matemáticas. Esos vínculos pueden ser evidentes, como en el caso de la ingeniería, o resultar menos notorios como en la medicina o la música.

El presente material está constituido por diferentes ejes temáticos. Cada uno de ellos se encuentra presentado con las definiciones y propiedades que se corresponden con su marco teórico. Además se encuentran ejemplos con sus respectivas resoluciones y ejercicios que servirán para realizar las prácticas correspondientes.

Los elementos mencionados anteriormente: definiciones, propiedades y ejercicios, son claves para el proceso de aprendizaje de la matemática, y de éstos contenidos en particular.

Desde el CENT 35 es nuestro deseo que se apropien de éstos contenidos y los mismos les sean de utilidad para lograr un desarrollo cognitivo lógico indispensable como estudiantes de las carreras que ofrece nuestra Institución.

Les damos la bienvenida y les deseamos a todos éxitos en esta etapa, cuentan con nuestra predisposición para llevar adelante procesos de enseñanza – aprendizajes que sean relevantes en su formación técnico profesional.

Propósitos

- Generar oportunidades a través de situaciones pedagógico – didácticas a fin de que todos los ingresantes al CENT 35 cuenten con un espacio para retomar saberes previos que favorecan su inserción al nivel superior.
- Ofrecer herramientas teórico metodológicas que posibiliten a los estudiantes retomar, reforzar y/o clarificar saberes relacionados con la Matemática.
- Favorecer el acercamiento progresivo del estudiante a la terminología técnica propia de la disciplina a fin de lograr su incorporación en experiencias de interacción oral y escrita.

Objetivos

- Relacionar, reconocer y aplicar las leyes de la matemática a los problemas cotidianos.
- Incorporar principios básicos y adquirir una metodología de trabajo que pueda aplicar posteriormente a la solución de problemas específicos de su carrera.
- Adquirir herramientas matemáticas que permitan fortalecer el pensamiento lógico considerando que no hay pensamiento matemático que no se origine de la experiencia de la realidad.

Números Reales

N → Conjunto de los números naturales

Z → Conjunto de los números enteros

Q → Conjunto de los números racionales

I → Conjunto de los números irracionales

R → Conjunto de los números reales

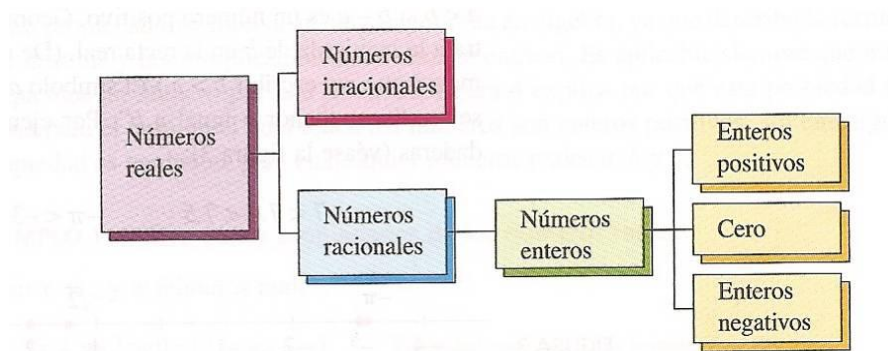
N = Los números naturales se definen como las nociones matemáticas enteras que denotan cantidades de elementos (1, 2, 3,, 10, 11,), NO incluye el 0.

Z = Las operaciones aritméticas sencillas, como la suma y la resta, introducen el concepto de los números negativos, que unidos a los positivos y al cero, constituyen el conjunto de los números enteros.

Q = Al incluir en el álgebra de los números enteros la multiplicación y la división, aparecen unas relaciones o proporciones entre números que se conocen como fracciones, los cuales junto con los números naturales conforman el conjunto de números racionales. Estos números pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros; y existen dos maneras de escribir un mismo número racional, como fracción o en forma decimal. La expresión decimal puede tener un número finito de cifras decimales significativas o es periódica.

I = Estos números son aquellos que no ser expresados como un cociente entre dos números enteros, por tener infinitas cifras decimales no periódicas, por ejemplo los siguientes números: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , e .

R = El conjunto que incluye los números racionales e irracionales se lo conoce como el de números reales.



Representación en la Recta

Los $\mathbf{R}$ se grafican sobre una recta denominada “recta real”. A un punto de la misma se le asigna el 0, se elige un segmento unidad y se ubican los números restantes. A cada número real le corresponde un punto en la recta y viceversa. Es decir como a cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta corresponde un número real, queda establecida una bisección entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de la recta. De esta manera los números reales cubren totalmente la recta.

Intervalos Reales

Se denomina “intervalo real” a toda semirrecta o segmento de la recta real.

Algebraicamente se designa un intervalo por sus extremos encerrados entre paréntesis o corchetes.

Por ejemplo, si $a < b$, entonces el “intervalo abierto” desde a hasta b está integrado por todos los números entre a y b , y se denota mediante el símbolo (a,b) . Utilizando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir:

$$(a,b) = \{ x / a < x < b \}$$

Nótese que los puntos extremos a y b no están incluidos en este intervalo. Este hecho queda indicado por los paréntesis () en la notación de intervalos.

El “intervalo cerrado” de a y b es el conjunto:

$$[a,b] = \{ x / a \leq x \leq b \}$$

Aquí los puntos extremos del intervalo han quedado incluidos. Esto se indica mediante corchetes [] en la notación de intervalos.

Entonces, utilizamos () si los extremos NO están incluidos (intervalo abierto) y utilizamos [] si se incluyen los extremos (intervalo cerrado).

También es posible incluir sólo un punto extremo en un intervalo, entonces un extremo será abierto y el otro será cerrado.

También es necesario considerar intervalos infinitos, como:

$$(a,\infty) = \{ x / x > a \}$$

Esto no significa que el ∞ (infinito) sea un número. La notación (a,∞) corresponde al conjunto de todos los números que son mayores que a , por lo que el símbolo ∞ simplemente indica que el intervalo se extiende de manera indefinida en la dirección positiva.

La siguiente tabla muestra los nueve tipos posibles de intervalos. Cuando estos se analicen, siempre supondremos que $a < b$.

Notación	Descripción del conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

Propiedades de los Números Reales

Al combinar los números reales utilizando las operaciones de suma y multiplicación, utilizamos las siguientes propiedades de los números reales:

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES		
Propiedad	Ejemplo	Nombre y Descripción
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Propiedad conmutativa de la suma Cuando sumamos dos números, el orden no tiene importancia.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Propiedad conmutativa de la multiplicación Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Propiedad asociativa de la suma Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos sumamos primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Propiedad asociativa de la multiplicación Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos multiplicamos primero.
$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Propiedad distributiva Cuando multiplicamos un número por la suma de otros dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y a continuación sumamos los resultados.

El número 0 es especial en el caso de la suma, se conoce como “neutro aditivo”, porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a . Todo número real a tiene un negativo $-a$, que satisface la ecuación $a + (-a) = 0$.

La resta (o sustracción) es la operación inversa de la suma; para restar un número de otro, simplemente se suma el negativo de dicho número. Por definición: $a - b = a + (-b)$

Para combinar números reales que involucren negativos, utilizamos las siguientes propiedades:

PROPIEDADES DE LOS NEGATIVOS	
Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$
5. $-(a + b) = -a - b$	$-(3 + 5) = -3 - 5$
6. $-(a - b) = b - a$	$-(5 - 8) = 8 - 5$

La propiedad N° 1 es especial para la multiplicación; se conoce como “neutro multiplicativo”, ya que $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a .

Cualquier número real a diferente de cero tiene un inverso $1/a$, que satisface la ecuación $a \cdot (1/a) = 1$.

La división es la operación inversa de la multiplicación, para dividir un número, multiplicamos por el inverso de dicho número.

Si $b \neq 0$, por definición:

$$a : b = a \cdot 1/b$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como a/b . Nos referimos a a/b como el cociente de a y b o como la fracción de a sobre b ; a es el numerador y b es el denominador (o divisor).

Para combinar números reales utilizando la operación de división, aplicamos las siguientes propiedades:

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES		
Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Para multiplicar fracciones, multiplique los numeradores y denominadores.
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Para dividir fracciones, invierta el divisor y multiplique
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$	Para sumar fracciones con un mismo denominador, sume los numeradores
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$	Para sumar fracciones con diferentes denominadores, obtenga un denominador común. Después sume los numeradores
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	Cancele los números que son factores comunes tanto en el numerador como en el denominador
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$.	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, así $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	Multiplique en forma cruzada

Cuando se suman fracciones con denominadores diferentes, por lo general no se utiliza la propiedad N° 4. En lugar de esto volvemos a escribir las fracciones, de manera que tengan un denominador común (normalmente menor al producto de los denominadores) y entonces utilizamos la propiedad N° 3. Este denominador es el Mínimo Común Denominador (MCD).

Ejemplo: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120} =$

Al descomponer cada denominador en sus factores primos (un número natural es un número primo cuando tiene únicamente 2 divisores, el mismo y el N° 1) obtenemos:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad \text{y} \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Determinamos el Mínimo Común Denominador (MCD) formando el producto de todos los factores obtenidos en la descomposición, utilizando la potencia más elevada de cada uno de ellos. Así, el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{5}{36} + \frac{7}{120} &= \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} && \text{Propiedad N° 5} \\ &= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} \\ &= \frac{71}{360} && \text{Propiedad N° 3} \end{aligned}$$

Regla de Signos

- Si un término está precedido por un signo “+”, no cambia el signo.
- Si un término está precedido por un signo “-”, este cambia de signo.

Multiplicación y División:

- 1- $+$. $+$ = $+$
- 2- $+$. $(-)$ = $-$
- 3- $(-)$. $+$ = $-$
- 4- $(-)$. $(-)$ = $+$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &= 6 \\ 4 \cdot (-2) &= -8 \\ (-3) \cdot 5 &= -15 \\ (-4) \cdot (-3) &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 / 5 &= 1 \\ 8 / (-2) &= -4 \\ (-16) / 4 &= -4 \\ (-18) / (-6) &= 3 \end{aligned}$$

Potenciación

Si a es cualquier número real y n es un número entero positivo, entonces la n -ésima potencia de a es:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n \text{ factores})$$

El número a se conoce como la “base” y n como el “exponente”.

Para el caso del exponente = 0 y negativos, se tiene lo siguiente:

EXPONENTES CERO Y NEGATIVOS

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces

$$(a) \quad a^0 = 1 \qquad (b) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Existen las siguientes reglas para el trabajo de exponentes y bases. En la siguiente tabla, las bases a y b son números reales, y los exponentes m y n son números enteros:

LEYES DE LOS EXPONENTES

Ley	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada factor a la potencia.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve tanto el numerador como el denominador a la potencia.

LEYES DE LOS EXPONENTES

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	Para mover del numerador al denominador o del denominador al numerador un número elevado a una potencia, cambie el signo del exponente.

Radicación

DEFINICIÓN DE LA RAÍZ N -ÉSIMA

Si n es cualquier entero positivo, entonces la **raíz n -ésima principal** de a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{significa} \quad b^n = a$$

Si n es par, tenemos que $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Para la radicación también existen propiedades, las cuales aparecen en el siguiente cuadro:

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES N -ÉSIMAS

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8} \sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = a $ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = -3 = 3$

Exponentes Racionales

Para definir un exponente racional o su equivalente, un exponente fraccionario como $a^{1/3}$, es necesario utilizar radicales. A fin de darle significado al símbolo $a^{1/n}$ en una forma consistente con las leyes de los exponentes, tenemos que

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Por esto, a partir de la definición de la raíz n -ésima

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

En general, definimos los exponentes racionales como sigue:

DEFINICIÓN DE EXPONENTES RACIONALES

Para cualquier exponente racional m/n expresado en su forma más simplificada, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

o, de manera equivalente $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Si n es par, entonces es necesario que $a \geq 0$.

Con ésta definición se puede comprobar que las leyes de los exponentes también son válidas para los exponentes racionales.

Operaciones con Números Racionales

División

Al efectuar la división no exacta de dos números enteros, puede suceder que:

- **el resto de la división sea cero:** en éste caso el cociente es una expresión decimal con un número finito de cifras decimales (expresiones decimales finitas).

Ejemplos

$$\text{a)} \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75 \qquad \text{b)} \frac{11}{5} = 11 : 5 = 2,2 \qquad \text{c)} -\frac{1}{8} = -1 : 8 = -0,125$$

- **el resto nunca se anule:** necesariamente se repite y al repetirse también lo hacen las cifras decimales del cociente, determinando el período (expresiones decimales periódicas).

Ejemplos

$$\text{a)} \frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,\overline{3} \qquad \text{b)} -\frac{3}{11} = -3 : 11 = -0,\overline{27} \qquad \text{c)} \frac{1}{45} = 1 : 45 = 0,0\overline{2}$$

Para transformar una expresión decimal periódica en fracción, se escribe en el numerador de la misma el número decimal, sin la coma, menos la parte no periódica; y en el denominador, tantos 9 como cifras decimales periódicas tenga la expresión, seguido de tantos ceros como cifras decimales no periódicas contenga.

Ejemplos

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 2,\overline{3} = \frac{23 - 2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} & \text{b)} -15,\overline{2} = -\frac{152 - 15}{9} = -\frac{137}{9} & \text{c)} 4,\overline{12} = \frac{412 - 4}{99} = \frac{408}{99} = \frac{136}{33} \\ \text{d)} 0,0\overline{5} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18} & \text{e)} -0,4\overline{6} = -\frac{46 - 4}{90} = -\frac{42}{90} = -\frac{7}{15} & \text{f)} 3,21\overline{5} = \frac{3.215 - 321}{900} = \frac{2.894}{900} = \frac{1.447}{450} \end{array}$$

Una operación donde aparezca una expresión decimal periódica conviene resolverla en forma fraccionaria.

Ejemplos

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad 0,4 \cdot \frac{7}{2} - 3^{-1} - \sqrt{0,4} &= \\ \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{4}{9}} &= \\ \frac{7}{5} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c)} \quad (-0,3)^2 - 4 : 0,25 + \frac{1}{5} : \sqrt{0,25} &= \\ 0,09 - 16 + 0,2 : 0,5 &= \\ 0,09 - 16 + 0,4 &= -15,51\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 0,3(1 - 0,4) + \sqrt[3]{-0,008} &= \\ \frac{9}{4} - \frac{3}{9} \cdot 0,6 + (-0,2) &= \\ \frac{9}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} - \frac{2}{10} &= \\ \frac{9}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} &= \frac{37}{20}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d)} \quad \frac{0,02.15}{0,1} + \frac{\sqrt[3]{1 - 0,875}}{2^{-3}} &= \\ \frac{0,3}{\frac{1}{9}} + \frac{\sqrt[3]{0,125}}{\frac{1}{8}} &= \\ \frac{3}{10} \cdot 9 + \frac{0,5}{0,125} &= \\ 2,7 + 4 &= 6,7\end{aligned}$$

Operaciones con Fracciones y Números Decimales

Toda fracción que tiene por denominador la unidad seguida de ceros se llama **fracción decimal**.

La décima parte de la unidad, o sea $1/10$, se llama unidad decimal de primer orden; la centésima parte de la unidad, o sea $1/100$, se llama unidad decimal de segundo orden; y así sucesivamente.

Prácticamente se conviene en representar una fracción decimal por su numerador, en el que se separa mediante una coma, la parte entera de la decimal. Por ejemplo: $456/100$ se representa por el número 4,56.

De acuerdo con lo dicho, se comprende que a la izquierda de la coma queda la parte entera, la primera cifra que sigue a la derecha de la coma es la de los décimos, la segunda, la de los centésimos, etc.

Ejemplos

$$3 / 100 = 0,03$$

$$8091 / 1000 = 8,091$$

Para distinguir una notación de otra, se conviene en llamar **fracción decimal** a la que tiene forma de fracción, y a la otra, **número decimal**.

Un número decimal NO se altera si se agregan ceros a la derecha de la última cifra decimal.

Multiplicación de un N° Decimal por la Unidad Seguida de Ceros

Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma tantos lugares hacia la derecha, como ceros siguen a la unidad. Si no alcanzan las cifras, se completan los lugares con ceros a la derecha.

Ejemplos

$$0,25 \times 100 = 25$$

$$12,4957 \times 10 = 124,957$$

$$7,69 \times 10.000 = 76.900$$

División de un N° Entero por la Unidad Seguida de Ceros

Para dividir un número entero por la unidad seguida de ceros, se separan con una coma tantas cifras de la derecha del número como ceros acompañan a la unidad. Si no alcanzan las cifras, se completan los lugares con ceros a la izquierda.

Ejemplos

$$236 : 1.000 = 0,236$$

$$4985 : 100 = 49,85$$

$$29 : 10.000 = 0,0029$$

División de un N° Decimal por la Unidad Seguida de Ceros

Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma tantos lugares hacia la izquierda, como ceros siguen a la unidad. Si no alcanzan las cifras se completan los lugares con ceros a la izquierda.

Ejemplos

$$92,93 : 10 = 9,293$$

$$5,48 : 1.000 = 0,00548$$

$$134,56 : 100 = 1,3456$$

Suma de Números Decimales

Para sumar dos o más números decimales se colocan uno debajo de otro, de manera que las comas queden en columna; se suman como si fueran enteros y en el resultado se coloca la coma alineada con la de los sumandos. La suma también puede efectuarse con los sumandos dispuestos horizontalmente, cuidando de sumar las unidades de los órdenes correspondientes y la posición de la coma en el resultado.

Ejemplo

$$\begin{array}{r} 0,458 + 2,37 + 9,086 = \\ + 2,37 \\ \underline{9,086} \\ \mathbf{11,9145} \end{array}$$

Resta de Números Decimales

Para resta dos números decimales se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que las comas queden en columna; se restan como si fueran enteros y en el resultado se coloca la coma en columna con las anteriores.

Ejemplo

$$1,59 - 3,2 =$$

Como el sustraendo tiene valor absoluto mayor que el minuendo, el valor absoluto del resultado se obtiene restando 1,59 de 3,2, es decir:

$$\begin{array}{r} 3,2 \\ - 1,59 \\ \hline 1,61 \end{array}$$

y como el signo corresponde al de mayor valor absoluto, es:

$$1,59 - 3,2 = - \mathbf{1,61}$$

Multiplicación de Números Decimales

Para multiplicar un número decimal por un número natural se multiplican como si fueran enteros y en el resultado se separan tantas cifras decimales como tiene el decimal dado.

Ejemplo $3,29 \times 3 = \mathbf{9,87}$

Para multiplicar dos números decimales, se multiplican como si fueran enteros y luego se separan en el producto tantas cifras decimales como la suma de las cifras decimales de los factores.

Ejemplo $4,21 \times 0,9 = \mathbf{3,789}$

División de Números Decimales

El cociente de un número entero por uno decimal con error menor que una unidad de un cierto orden, se transforma en cociente de dos números enteros, multiplicando dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como decimales hay en el divisor.

Ejemplo $127 : 2,3 = 1270 : 23 = \mathbf{55,21} \quad (\epsilon < 0,01)$

En el caso de una división de dos números decimales, es suficiente transformar el divisor en entero, para ello es evidente que basta multiplicar el dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor.

Ejemplo $4,256 : 1,12 \text{ (}\epsilon < 0,01\text{)} = 4,256 \times 100 : 1,12 \times 100 = 425,6 : 112$

$$= 3,8$$

Conviene destacar que en todas las divisiones donde el divisor es decimal, el procedimiento a seguir es transformar el divisor en entero, multiplicando por la unidad seguida de ceros, no interesando que el dividendo quede transformado en un entero o en un decimal.

Operaciones Combinadas

Se van a desarrollar algunos ejercicios a fin de recordar las propiedades y reglas operatorias con números racionales.

Ejercicio N° 1: $2/3 - 4/9 - 5/6 + 1/2 =$

Como el Mínimo Común Denominador (MCD) es 18, se tiene:

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{9} - \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{12 - 8 - 15 + 9}{18} = \frac{21 - 23}{18}$$

$$= -\frac{2}{18} = \boxed{-\frac{1}{9}}$$

Ejercicio N° 2: $3 + 1/4 - (-1/5) - 7/8 - 2 + (-1/2) =$

Al suprimir los paréntesis, la expresión anterior se transforma en:

$$3 + 1/4 + 1/5 - 7/8 - 2 - 1/2 =$$

Como figuran números enteros 3 y - 2, un procedimiento es efectuar la suma entre ellos, y a éste resultado agregar la suma de los fraccionarios puros, cuyo MCD es 40.

En consecuencia:

$$3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{7}{8} - 2 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{10 + 8 - 35 - 20}{40} =$$

$$= 1 + \left(-\frac{37}{40}\right) = \frac{40 - 37}{40} = \boxed{\frac{3}{40}}$$

Ejercicio N° 3:

$$2\frac{5}{8} \cdot \frac{16}{81} \cdot \left(-\frac{4}{35}\right) \cdot 3$$

Primero es preciso reducir el número mixto $2\frac{5}{8}$ a la fracción impropia, esto es multiplicar el denominador (8) por la parte entera (2) y este resultado sumarlo al numerador (5), este valor va a ser el

numerador, y como denominador persiste el del número mixto (8). En nuestro caso da por resultado la fracción $21/8$. Luego efectuar todas las simplificaciones posibles y por último calcular el numerador que va a ser igual al producto de los numeradores y por denominador, el producto de los denominadores, es decir:

$$2 \frac{5}{8} \cdot \frac{16}{81} \cdot \left(-\frac{4}{35}\right) \cdot 3 = -\frac{\overset{1}{\cancel{21}}}{\underset{\overset{2}{\cancel{2}}}{8}} \cdot \frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\underset{\overset{27}{\cancel{81}}}{9}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{\overset{5}{\cancel{35}}}{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} = \boxed{-\frac{8}{45}}$$

EJERCICIO 4:

$$\sqrt{\left(40 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2^{-1}} + \frac{\left(\frac{\frac{1}{3} - 2}{1 - \frac{3}{2}}\right)^{-2}}{\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - 4}} - \frac{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-2} : 5}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2}$$

Se efectúan previamente las operaciones indicadas en cada término.

Primer término:

$$\sqrt{\left(40 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2^{-1}} = \sqrt{\frac{81}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$$

Segundo término:

$$\frac{\left(\frac{\frac{1}{3} - 2}{1 - \frac{3}{2}}\right)^{-2}}{\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - 4}} = \frac{\left(\frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}}{\frac{\frac{1}{6}}{-\frac{10}{3}}} = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^{-2}}{-\frac{1}{20}} = -\frac{\frac{9}{100}}{\frac{1}{20}} = -\frac{9}{5}$$

Tercer término:

$$\frac{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-2} : 5}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} : 5}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{1}{9} : 5}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{5} \cdot 16 = \frac{16}{5}$$

Luego, considerando la suma algebraica dada, se tiene:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(40 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2^{-1}} + \frac{\left(\frac{\frac{1}{3} - 2}{1 - \frac{3}{2}}\right)^{-2}}{\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - 4}} - \frac{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-2} : 5}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \\ & = \frac{9}{2} - \frac{9}{5} - \frac{16}{5} = \frac{9}{2} - \frac{25}{5} = \boxed{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ejercitación Propuesta

1) Resolver en forma decimal los siguientes cálculos:

$$1) 4,78 + 3,28 =$$

$$3) 0,2(-0,55) =$$

$$2) 2,1 - 0,42 =$$

$$4) -12 : 0,4 =$$

2) Resolver los siguientes cálculos:

$$1) \frac{3}{4} \cdot 2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1,8 =$$

$$2) 6,2 - 3,4 : (-2) + \frac{3}{2} =$$

$$3) (1 - 0,7)0,2 + 1,8 : 2 - 1 =$$

$$4) \frac{2}{5} : \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} - 1 =$$

$$5) 0,7 : (-2) + 0,1(-0,1) + \frac{1}{4} =$$

$$6) 10 : \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + 2(-1,4 + 0,2) =$$

3) Escribir en forma decimal cada una de las siguientes fracciones:

$$1) \frac{17}{5} =$$

$$3) \frac{2}{45} =$$

$$5) \frac{38}{11} =$$

$$2) \frac{32}{3} =$$

$$4) \frac{11}{15} =$$

$$6) \frac{101}{330} =$$

4) Escribir como fracción irreducible cada una de las siguientes expresiones decimales:

$$1) 0,\widehat{8} =$$

$$3) 3,\widehat{15} =$$

$$5) 2,\widehat{52} =$$

$$2) 2,\widehat{5} =$$

$$4) 0,\widehat{18} =$$

$$6) 5,\widehat{24} =$$

5) Resolver los siguientes cálculos:

$$1) (1,\overline{3} - 0,\overline{3}) : \left(-\frac{1}{6}\right) - 0,2 =$$

$$3) (1,\overline{5} + 0,\overline{1})0,6 - 1,0\overline{2} =$$

$$2) -0,\overline{2} \cdot \frac{9}{5} + 1,\overline{3} : 0,8\overline{3} =$$

$$4) (3,4\overline{2} \cdot 0,0\overline{75} + 1,\overline{2})0,75 =$$

6) Calcular las siguientes potencias:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$	5) $(0,3)^4 =$
2) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} =$	6) $(-0,3)^2 =$
3) $0,1^2 =$	7) $(0,2)^3 =$
4) $(-0,2)^3 =$	8) $(-1,2)^2 =$

7) Calcular las siguientes raíces:

1) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} =$	5) $\sqrt[3]{0,000064} =$
2) $\sqrt{\frac{121}{100}} =$	6) $\sqrt{0,4} =$
3) $\sqrt{0,09} =$	7) $\sqrt{1,7} =$
4) $\sqrt[3]{-0,027} =$	8) $\sqrt{0,694} =$

8) Resolver los siguientes cálculos combinados:

1) $\left(0,3 + \frac{5}{6}\right) : 0,1 - 5\sqrt{\frac{81}{16}} =$	4) $2\sqrt{2,7} - 1,3^{-1} \cdot 0,04 + 2^{-2} =$
2) $\sqrt{\left(\frac{4}{3} - 1\right)0,3} + (0,1 \cdot 7 - 3,1)0,16 =$	5) $\sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}} + (2 \cdot 0,3 + \sqrt{0,04})^{-1} - \frac{3}{2} =$
3) $\left(-\frac{9}{7} \cdot 0,25 + \frac{2}{7}\right)(0,6 + 0,3^2) =$	6) $0,08 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 \sqrt[3]{8} + \sqrt{\frac{25}{64}} \right] - 0,26 =$

9) Resolver las siguientes operaciones:

1) $(0,3 - 2)0,6 + \sqrt[3]{-0,008} - 1,2 : 3 =$	4) $(0,2 + 0,6) : 0,82 - \sqrt[3]{\left(4 - \frac{7}{2}\right)0,25} + 2^{-3} =$
2) $\sqrt{(1 - 2 : 0,5)0,4 + 1,4} + 2^{-2} =$	5) $\sqrt{(2,3 - 1)^{-2} + 1} - \frac{3}{5} : 0,8 + \left(\frac{3}{2} - 1,2\right)^2 \cdot 3,3 =$
3) $0,04\left(\frac{1}{2} - 0,3\right)^{-1} - \sqrt{0,2 \cdot 0,5^{-1}} + \frac{3}{4} =$	6) $\left(1 - \sqrt{0,35 \cdot 5}\right)^{-1} + \frac{\sqrt{0,04}}{2} - \left(2^2 - \frac{1}{3}\right)\frac{5}{22} =$

10) Resolver los siguientes problemas:

a) Una cuenta corriente tiene un saldo inicial deudor de \$7825; recibe 18 depósitos de \$2500 cada uno y cuatro de \$1800 cada uno y se extraen, sucesivamente: 3 veces \$9500; la cuarta vez: \$4825 y las dos últimas veces: \$3218 en cada una. ¿Cuál es el saldo actual?

b) Una pileta es llenada por una canilla que arroja 120 l por minuto, pero tiene una grieta por donde pierde 5 l cada 30 segundos. a) ¿Cuántos litros contiene al cabo de una hora? b) Si su capacidad es de 125.400 l, ¿cuántas horas tardará en llenarse? c) Si cuando la pileta está llena se cierra la canilla, ¿cuánto tardará en vaciarse por completo?

c) Cada mes una persona gana \$8450 y gasta \$8200. El resto lo deposita en el banco, donde tiene una deuda. Si el saldo de su cuenta bancaria es de \$ – 12250 ¿Cuántos meses, como mínimo le llevará a la persona saldar su deuda?

d) Un período escolar se inicia el 2 de marzo y finaliza el 30 de noviembre. ¿De cuántos días de clase consta, sabiendo que hay 55 días entre feriados y domingos, 7 días de suspensión de actividades por intercolegiales, 4 por falta de calefacción y 3 de estudiantina?

e) ¿Cuántos minutos y segundos hay en $\frac{2}{3}$ de una hora?

f) ¿Cuántos centímetros hay en $\frac{3}{4}$ de un metro?

g) ¿Es lo mismo $\frac{1}{3}$ de torta que $\frac{4}{12}$ de esa misma torta?

h) ¿Qué cantidad queda después de gastar los $\frac{3}{7}$ de \$ 490?

i) Un autor escribió una novela en cuatro meses. En el primer mes escribió los $\frac{1}{3}$ de la novela, en el segundo mes, los $\frac{3}{12}$ y en el tercero, $\frac{1}{4}$. ¿Qué fracción de la novela escribió en el cuarto mes?

j) Una familia gasta $\frac{1}{3}$ de su sueldo en alquiler del departamento; $\frac{1}{15}$ del sueldo en teléfono y electricidad y $\frac{2}{5}$, en alimentos, transporte y ropa. Si el ingreso mensual de la familia es de \$9.400, ¿qué importe destina para cada uno de los rubros mencionados? ¿Pueden ahorrar algo durante el mes para otras necesidades?, ¿cuánto podrían ahorrar?

Razones y proporciones

Introducción

Imaginémonos que Marcela y Elita, tienen \$8.000 y \$10.000, respectivamente. Al comparar estas cantidades podemos decir que Elita tiene \$2.000 más que Marcela. Sin embargo, esta diferencia no resultaría ser significativa si las cantidades de dinero fueran muy grandes. Otra forma en que podemos compararlas es mediante la División, es decir:

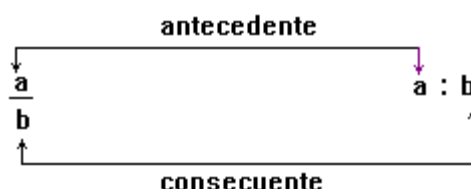
$$\frac{8.000}{10.000} = \frac{4}{5}$$

Esto nos indica que por cada \$4 que tiene Marcela, Elita tiene \$5.

Definición: Llamaremos razón entre dos cantidades a y b a la comparación de ellas mediante la división.

Notación: La razón entre a y b se escribe $\frac{a}{b}$ o bien a : b

Los elementos que forman la razón se llaman **antecedente** y **consecuente**



Ejemplo 1: Si Sergio tiene 50 años y Marcos tiene 25 años, entonces la razón entre la edad de Sergio y la Edad de Marcos es:

$$\frac{\text{Sergio}}{\text{Mar cos}} = \frac{50}{25} = \frac{2}{1}$$

La razón $\frac{2}{1}$ indica que la edad de Sergio es el doble de la edad de Marcos. ¿Cuál es la razón entre la edad de Marcos y de Sergio?

Ejemplo 2: Si un automóvil recorre una distancia de 100 Km en 2 horas, entonces la razón entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla es:

$$\frac{100\text{Km}}{2h} = 50 \frac{\text{Km}}{h}$$

¿Recuerda usted, qué concepto mide esta razón?

¿Tendría sentido la razón inversa?

Observación: Llamaremos razón tanto a la comparación como al cociente obtenido, en otras palabras interesa el orden de comparación

Proporciones

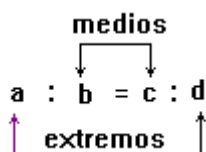
Al simplificar la fracción $\frac{50}{100}$ para obtener $\frac{1}{2}$ nos encontramos con dos razones que tienen el mismo valor. Es decir, estamos frente a una proporción.

Definición: Llamaremos proporción a la igualdad de dos razones.

Notación: Si las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales, entonces la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se anota también así:

$a : b = c : d$. En ambos casos se lee: “a es a b como c es a d”

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, los términos a y d son los **extremos** y los términos b y c son los **medios**.



Teorema propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \quad \text{con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

Ejemplo: ¿Forman una proporción las razones $\frac{33}{39}$ y $\frac{44}{52}$?

Dada una proporción, podemos obtener otras proporciones con los mismos términos, utilizando las siguientes transformaciones:

$$a) \text{Permutar} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

$$b) \text{Invertir} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$c) \text{Alternar} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ medios}$$

$$d) \text{Alternar} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ extremos}$$

Ejercitación Propuesta

1) Encontrar la razón entre:

a) $\frac{3}{25}$ y $\frac{15}{8}$

b) $8\frac{3}{5}$ y $4\frac{7}{9}$

c) 180g. y 3,6Kg.

d) 15 min. y 3hrs.

e) $16\frac{2}{3}$ y 300

f) 2,25 y 0,75

2) Calcular el valor de x en las siguientes proporciones:

a) $\frac{x}{105} = \frac{20}{35}$

b) $\frac{4,4}{x} = \frac{6,6}{5,4}$

c) $\frac{\frac{5}{14}}{\frac{9}{25}} = \frac{x}{\frac{8}{15}}$

d) $\frac{4 + \frac{2}{7}}{15 + \frac{2}{5}} = \frac{11\frac{2}{3}}{x}$

3) Dos montañistas están subiendo un cerro de 4.000 m de altura. ¿Cuántos metros les quedan por subir si ya han recorrido $\frac{5}{8}$ del total?

4) El auto de Gabriel tiene un tanque de nafta con una capacidad de 40 litros. Como se va de paseo, llena el tanque por lo que paga \$ 500. Si el litro de nafta vale \$ 8,25, ¿Qué parte del tanque estaba con nafta?

5) Cuatro cuadernos universitarios valen \$ 750. Una señora necesita comprar dos docenas de esos mismos cuadernos para sus hijos, ¿cuánto dinero tendrá que gastar?

6) ¿Cuánto tiempo necesitará Matías para realizar 248 copias si su impresora tarda 5 minutos en imprimir 20 copias? (Expresar el resultado en horas y min.)

7) Medimos en un mapa la distancia entre las capitales de Argentina y Paraguay, y es de 1,35 cm. En una esquina del mapa encontramos la escala con que fue hecho: 1cm: 850 Km. ¿Cuántos kilómetros aproximadamente separan ambas ciudades?

8) Un hombre normal tiene aproximadamente 5 litros de sangre, de los cuales 2,25 litros corresponden a los glóbulos y plaquetas, y el resto, al plasma. ¿Qué porcentaje de la sangre representan los glóbulos y plaquetas, y cuál al plasma?

9) Una bacteria de forma circular tiene un radio aproximado de 1,2 mm. Al observarla mediante un microscopio su radio es de 1,44 m. ¿Cuántas veces aumenta el tamaño de la bacteria al observarla mediante este microscopio?

Porcentaje o tanto por ciento

En estudios de publicidad o marketing, principalmente, es importante conocer las opiniones y las preferencias de las personas, para esto se utilizan las encuestas cuyos resultados se entregan, por lo general, en porcentajes o tanto por ciento.

Frecuentemente aparecen en la prensa datos referidos a porcentajes, por ejemplo:

- 1) La población de Chile en los últimos 10 años aumento un 15%.
- 2) Los depósitos a 30 días generan un interés del 0,3%
- 3) Algunos Senadores piden que el IVA se aumente en un 0,5%

Definición: Un porcentaje o tanto por ciento es simplemente una fracción con denominador constante e igual a cien.

O bien **Porcentaje** es el valor que resulta de comparar una parte con un todo en una escala de 1 es a 100. Se puede considerar que el porcentaje es un caso particular de proporcionalidad directa en que uno de los términos de la proporción es 100.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{100}$$

a es el porcentaje

b es la cantidad de referencia

c es el tanto por ciento

Notación: Las palabras porcentaje o tanto por ciento se abrevian mediante el símbolo %

De acuerdo a la definición, para calcular el tanto por ciento de una cantidad calculamos la fracción decimal correspondiente de dicha cantidad.

Ejemplo: ¿Cuánto es el 5% de 30?

Solución: 5% de 30 = $\frac{5}{100} \cdot 30 = 1,5$

I.- Tanto por ciento de un número. El a% de x

II.- Relación porcentual de dos números. ¿Qué % es a de x?

III.- Calculo del total, conocido el porcentaje. ¿ De qué número, a es el b%?

IV.- Porcentajes sucesivos. El p% del q% de A es x $\Rightarrow x = \frac{p}{100} \cdot \frac{q}{100} \cdot A$

Ejercitación Propuesta

1. 200% de 200
2. 25% de 1,6
3. ¿Qué porcentaje es 100 de 50?
4. ¿Qué porcentaje es A de A2
5. ¿De qué número es 15 el 15%?
6. ¿De qué número es 45 el 30%?
7. El 20% del 50% de 75
8. El 75% de un número es 9; ¿Cuál es el 50% de ese número?
9. ¿Qué porcentaje es 74 de 37?
10. El 90% del 50% de 180 es
11. ¿Qué porcentaje es 25 del 75% de 12?
12. Un comerciante compró una mercadería en \$ 4.800 y la vendió obteniendo el 12% de ganancia. ¿En cuánto la vendió?

Ejercicios

Dos personas A y B tienen un capital de \$ 80.000, y aportó el 40% de este capital. Todo el capital se invierte en la compra de mercadería y gastos de administración. El primer mes se vende toda la mercadería en \$ 100.000. Entonces:

- a) ¿Qué cantidad aportó B?
- b) ¿Qué tanto por ciento se ganó en la venta?
- c) ¿En cuanto deberían vender la mercadería para que el 10% de la ganancia total fuese \$ 5.000?

Solución

- a) Como A aportó el 40% del capital, entonces B aportó lo que falta para completar el 100%, es decir, 60%. Luego, debemos calcular el 60% de \$80.000?

$$\frac{60}{100} = \frac{x}{80.000} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 80.000}{100} = 48.000$$

De modo que B aportó \$48.000

- b) La utilidad del negocio es igual a:

$$\text{UTILIDAD} = \text{VENTA} - \text{COSTO} = \$100.000 - \$80.000 = \$ 20.000$$

Por lo tanto, la utilidad es un 25% del capital invertido.

c) Tenemos que calcular la cantidad de la cual \$ 5.000 es el 10%

$$\frac{10}{100} = \frac{5.000}{x} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 5.000}{10} = 50.000$$

Por lo tanto, la ganancia total sería \$ 50.000

Luego la mercadería debería venderse en \$ 80.000 + \$ 50.000 = \$ 130.000; de modo que el 10% de la ganancia total fuese \$ 5.000

1) El costo de fabricación de un artículo es \$ 5.000. El fabricante lo vende al comerciante ganando un 12% y este al consumidor con una ganancia del 20% sobre su precio de compra. ¿Cuánto paga el consumidor por el artículo?

2) Juan se compra una polera a \$ 4.420 a la que se le había aplicado un descuento de un 15%. ¿Cuánto costaba originalmente la polera?

3) En una tienda comercial se hace una liquidación donde todos los productos son rebajados en un 20%. Después de una semana todos los artículos vuelven a rebajarse en un 5%. Si un pantalón vale originalmente \$ 12.000

a) ¿Cuánto vale después de la primera liquidación?

b) ¿Cuánto vale después de la segunda liquidación?

c) La oferta sería igual si originalmente todos los productos hubiesen sido rebajados en un 25%? Explica

4) De las 2000 entradas que había para un recital, el primer día se vendió el 70 %. ¿Cuántas entradas quedan para vender?

5) Luis quiere comprar un par de zapatillas cuyo precio de lista es \$ 780. Por pago efectivo tiene un descuento del 10%. Por pago con tarjeta debe abonar 3 cuotas de \$69 cada una.

a) ¿Cuánto dinero debe juntar para pagarlo en efectivo?

b) ¿Qué porcentaje de recargo sufre si lo paga con tarjeta?

Aplicaciones comerciales del porcentaje

En Chile existe un impuesto llamado IVA (Impuesto al valor agregado) que se aplica a toda transacción comercial. Cada producto tiene un **valor neto** al cual se le debe agregar el IVA para obtener el **precio total**. Actualmente el IVA corresponde al 19% del valor neto. Esto quiere decir, que para obtener el precio total debemos hacer la siguiente operación:

$$\text{Valor neto} + 19\% \bullet \text{Valor neto} = \text{Precio total}$$

El SII (servicio de impuestos internos) se asegura el pago de este impuesto a través de documentos específicos, como las boletas de venta y las facturas.

Álvaro Sánchez V. R.U.T. 1.001.001-K "ALMACEN LA GANGA" La Florida N° 001		
BOLETA COPIA CLIENTE N° 10007		
BOLETA DE VENTA		
Total		
DIA	MES	AÑO

En Las boletas de venta, el precio que aparece escrito incluye el IVA. En las facturas, en cambio, aparece escrito en detalle el valor neto, el IVA y el precio total.

Es muy importante que el cliente se fije si el valor que le entregan incluye o no el IVA, ya que de eso dependerá el valor real de su compra.

(1) Por la compra de una enciclopedia se paga \$ 49.560, incluido el IVA. ¿Cuál es el valor neto de ese libro?

(2) En una fábrica se confecciona la siguiente lista con los precios de los artículos que produce:

Artículo	Precio Unitario sin IVA	Precio + IVA
A	\$ 6.845	
B	\$ 3.428	
C	\$ 4.215	
D	\$ 8.932	
E	\$ 4.550	

a) Completa la tabla

b) Si un cliente desea comprar todos los artículos de la lista, ¿Cuánto debe pagar?

d) ¿Es lo mismo sumar los precios de los artículos y a esto calcular el IVA, que calcular el IVA al precio de cada producto y luego sumarlos?

Regla de tres simple

Sea, por ejemplo, el siguiente problema: si 80 kg de azúcar cuestan A 28, ¿cuánto cuestan 60 kg de azúcar de esa misma calidad?

Como se ve, figuran dos cantidades: 80 kg y 60 kg de la magnitud peso, y una cantidad, A 28, de la magnitud precio, que corresponde a los 80 kg. Se pide calcular la otra cantidad de la magnitud precio, correspondiente a los 60.

Los problemas de este tipo, que consisten en: dadas dos cantidades de una magnitud y la correspondiente a la primera de ellas en la otra magnitud, calcular la correspondiente a la segunda, se llaman de *regla de tres simple*. Las magnitudes que intervienen pueden ser directa o inversamente proporcionales; en el primer caso, la regla de tres simple se dice *directa*-, en el segundo, *inversa*.

Para resolver estos problemas, se procede así:

En el problema enunciado las cantidades que se corresponden son:

80 kg	→	A 28
60 kg	→	X

Gráficamente:

donde con X se indica la cantidad que se desea calcular y que es el precio que corresponde a 60 kg de azúcar.

Como en este caso las magnitudes peso de azúcar y precio son directamente proporcionales —pues a medida que se duplica, triplica..., la cantidad kg, también se duplica, triplica..., la cantidad precio—, la relación que vincula estas dos magnitudes, es una función lineal de la forma: $y = k x$.

Como ya se sabe, este coeficiente k está dado por la razón entre la medida de una cantidad de la magnitud precio y la medida de la cantidad de la magnitud peso a que corresponde; en este ejemplo, como A 28 es la cantidad que corresponde a 80 kg se tiene:

$$k = \frac{28}{80} = 0,35$$

Por lo tanto la función que vincula a las dos magnitudes de este problema, es:

$$y = 0,35 x$$

donde x representa la medida de una cantidad cualquiera de la magnitud peso de azúcar, y y la medida de la cantidad correspondiente a la magnitud precio.

En este caso como se desea calcular el precio correspondiente a 60 kg de azúcar, es $x = 60$; luego la y que le corresponde es:

$$y = 0,35 \times 60 = 21$$

Como la unidad es , la cantidad buscada es:

$$X = \text{ } 21$$

Luego, los 60 kg de azúcar cuestan  21

Obsérvese que el procedimiento anterior tiene mucha semejanza con el método de proporciones para la resolución de problemas de regla de tres directa.

En efecto, al aplicar este método de proporciones al problema del ejemplo, como se trata de magnitudes directamente proporcionales se establece la siguiente proporción:

$$\frac{80 \text{ kg}}{60 \text{ kg}} = \frac{\text{ } 28}{X}$$

en consecuencia:

$$X = \frac{\text{ } 28 \times 60}{80} = \text{ } 21$$

resultado que coincide con el anterior.

Otro ejemplo de regla de tres simple puede ser:

Sabiendo que los $\frac{3}{4}$ del aceite de un tonel pesan 108,57 kg, ¿cuánto pesarán los $\frac{4}{7}$ del mismo?

Es decir que las cantidades correspondientes son:

$$\begin{array}{lcl} \frac{3}{4} & \longrightarrow & 108,57 \text{ kg} \\ \frac{4}{7} & \longrightarrow & X \end{array}$$

Como las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales, pues al aumentar la parte del aceite en el tonel, aumenta el peso, en la misma proporción, la función que resuelve el problema, es:

$$y = kx$$

$$\text{Como } k = \frac{108,57}{\frac{3}{4}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ y \quad x = \frac{4}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{108,57}{\frac{3}{4}} \times \frac{4}{7} = \frac{108,57 \times 4 \times 4}{3 \times 7} = 82,72$$

por lo tanto $X = 82,72 \text{ kg}$.

Respuesta: los $\frac{4}{7}$ del tonel pesan 82,72 kg.

Otro ejemplo de regla de tres simple puede ser:

Si 10 obreros realizan una obra en 25 días, ¿cuántos días emplean 5 obreros en las mismas condiciones de trabajo para hacer la misma obra?

Las cantidades que se corresponden son:

$$\begin{array}{ccc} 10 \text{ ob} & \longrightarrow & 25 \text{ d} \\ 5 \text{ ob} & \longrightarrow & X \end{array}$$

Gráficamente:

En este caso el número de obreros y el número de días empleados en realizar una determinada obra, pertenecen a magnitudes inversamente proporcionales, pues a medida que se duplica, triplica ..., el número de obreros, el número de días se reduce respectivamente a la mitad, la tercera parte ...

En consecuencia la relación que vincula estas dos magnitudes es una función de la forma: $y = \frac{k}{x}$.

Recuérdese que el coeficiente k está dado por el producto de las medidas de dos cantidades correspondientes; en este caso, como:

$$10 \text{ ob} \longrightarrow 25 \text{ d}$$

se tiene:

$$k = 10 \times 25$$

Luego, la función que vincula las dos magnitudes del problema es:

$$y = \frac{10 \times 25}{x}$$

donde x representa un número cualquiera de obreros y y el número de días que le corresponde para realizar el trabajo. En este caso, como se desea calcular el número de días que corresponde a 5 obreros, es $x = 5$; luego la y correspondiente es:

$$y = \frac{10 \times 25}{5} = 50$$

Para empapelar una habitación se utilizan 9 rollos de papel de 0,60 m de ancho. ¿Cuántos rollos de 45 cm de ancho se necesitarán para empapelar una habitación de iguales dimensiones?

Como uno de los anchos está expresado en metros y el otro en centímetros, de acuerdo con la nota, es necesario expresar los dos en la misma unidad.

En este ejemplo se elige cm, pues evita trabajar con números decimales, y las cantidades correspondientes resultan:

$$\begin{array}{ccc} 60 \text{ cm} & \longrightarrow & 9 \text{ rollos} \\ 45 \text{ cm} & \longrightarrow & X \end{array}$$

Como las magnitudes de este problema son inversamente proporcionales, la relación que los vincula es la función: $y = \frac{k}{x}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Como } k = 60 \times 9 \\ y \quad x = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{60 \times 9}{45} = 12$$

por lo tanto $X = 12$ rollos

Respuesta: la cantidad necesaria es 12 rollos.

Ejercitación Propuesta

Regla de Tres Simple Directa

- 1) Un avión tarda 2 min para recorrer 4,5 km. ¿Cuánto tarda en recorrer con la misma velocidad: 180 km; 900 km; 225 km, respectivamente?
- 2) En un día de trabajo de 8 horas, un obrero ha hecho 10 cajas. ¿Cuántas horas tardará en hacer 25 de esas mismas cajas? R: 20 horas
- 3) Un obrero gana \$ 960 por 8 horas de trabajo. ¿Cuánto tiempo ha trabajado para ganar \$ 1920 y \$ 2400, respectivamente?
- 4) Si una docena de vasos cuesta \$ 744, ¿Cuánto debe abonarse por 17 de esas copas? R: \$ 1054
- 5) Si para pintar 180 m^2 se necesitan 24 lt de pintura, ¿cuántos lt se necesitarán para pintar una superficie rectangular de 12 m de largo por 1000 cm de ancho? R: 16 lt
- 6) Un automóvil recorre 100 km en 1 h 32 min. ¿En qué tiempo recorrerá 60 km?
R: 55 min 12 seg

Regla de Tres Simple Inversa

- 1) Ocho obreros han tardado 24 horas para realizar un trabajo. ¿Cuánto tiempo hubiesen empleado para hacer el mismo trabajo 4 obreros, 6 obreros, 12 obreros y 18 obreros, respectivamente?
- 2) Doce obreros han hecho la mitad de un trabajo en 18 horas. A esa altura de la obra, 4 obreros abandonan el trabajo. ¿Cuántas horas tardan en terminarlo los obreros que quedan? R: 27 horas
- 3) Un ganadero tiene 36 ovejas y alimento para ellas por el término de 28 días. Con 20 ovejas más, sin disminuir la ración diaria y sin agregar forraje, ¿durante cuántos días podrá alimentarlas? R: 18 días
- 4) Para empapelar una habitación se necesitan 15 rollos de papel de 0,45 m de ancho. ¿Cuántos rollos se necesitarán, si el ancho fuera de 0,75 m? R: 9 rollos
- 5) Un trabajo puede ser realizado por 80 obreros en 42 días. Si el plazo para terminarlo es de 30 días, ¿cuántos obreros deberán aumentarse? R: 32 obreros
- 6) Con 15 kg de hierro se han hecho 420 tuercas de 4 pulgadas. ¿Cuántas tuercas semejantes a las anteriores, pero de 3 pulgadas, se pueden hacer con la misma cantidad de hierro? R: 560 tuercas

Gráficos estadísticos

Las representaciones gráficas deben conseguir que un simple análisis visual ofrezca la mayor información posible. Según el tipo de variable que estemos estudiando, usaremos una u otra representación.

Al realizar gráficos estadísticos debemos tener en cuenta lo siguiente:

- ✓ Todo gráfico debe llevar un título principal indicando la variable que se representa y la unidad de medida utilizada.
- ✓ Aclarar el tipo de frecuencia que se está utilizando para evitar confusiones
- ✓ Los ejes deben llevar sus respectivos nombres
- ✓ Al pie del mismo debemos citar la fuente de información.

Diagramas de barras

Un diagrama de barras se utiliza para representar datos cualitativos o datos cuantitativos discretos. Se grafica sobre ejes cartesianos graduados con una escala adecuada, en el eje de abscisas (eje x) se colocan los valores de la variable y, sobre el eje de ordenadas (eje y), las frecuencias absolutas o relativas o acumuladas. Los datos se representan mediante barras de una altura proporcional a la frecuencia. También se suele utilizar para series cronológicas y pueden, asimismo, representarse horizontalmente intercambiando los ejes.

Ejemplo. Cantidad de pan que consumen 4 amigos en un mes.

Eje y: kilogramos ; eje x: nombre amigos

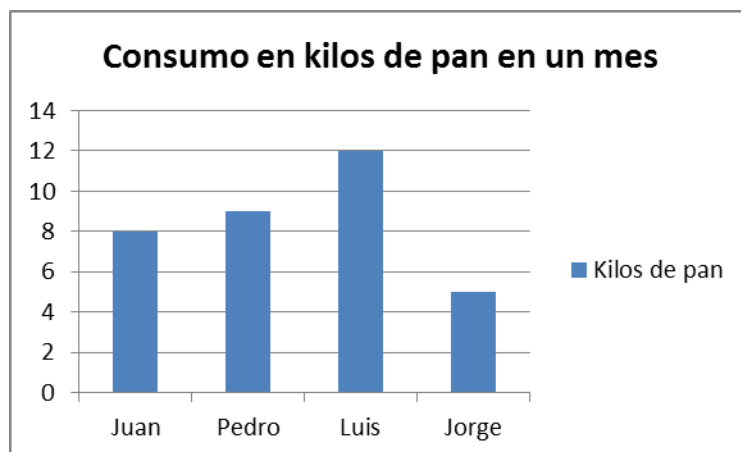
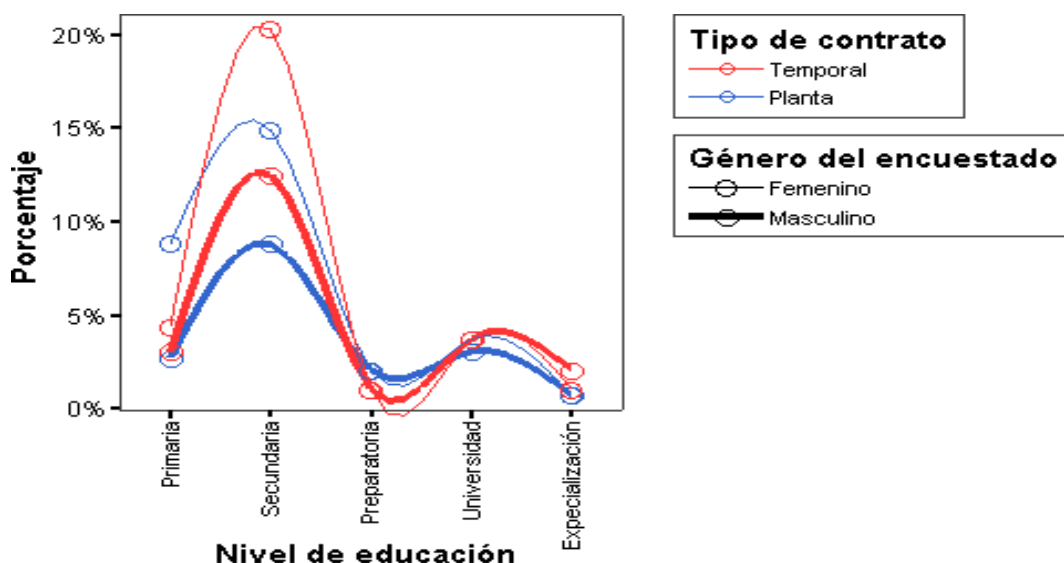


Gráfico de líneas

Se utiliza para analizar la evolución de una variable en el tiempo. Gráficamente son parecidas a funciones continuas, pero no deben confundirse con funciones pues no representan relaciones funcionales.

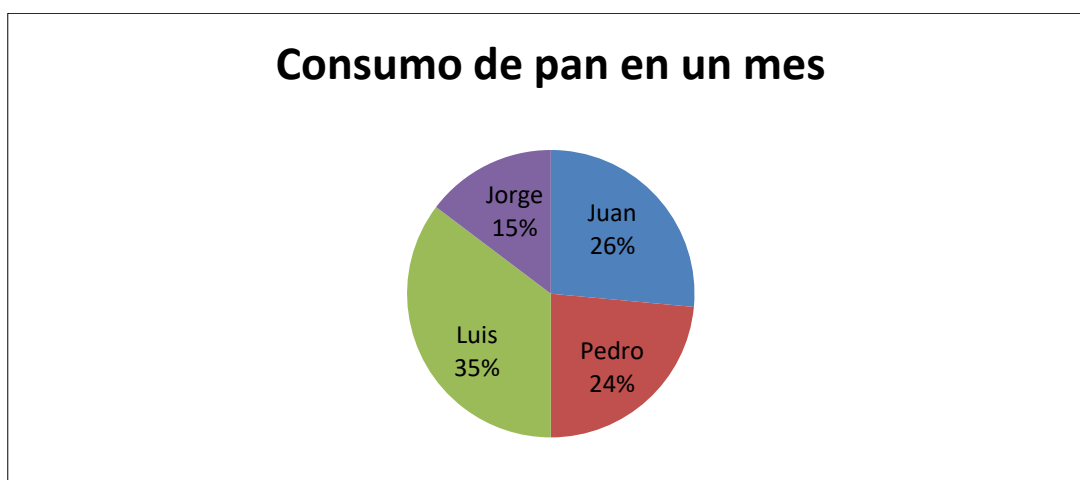


Gráficos circulares

Es el gráfico más adecuado para representar variables cualitativas con sus respectivas frecuencias porcentuales. Se utilizan para analizar la participación de cada categoría de la variable en el total de la muestra. Esta participación es proporcional al total de las observaciones. Por eso, para graficar los distintos sectores en los que queda dividido el círculo, tenemos que calcular el ángulo que le corresponde a cada sector, siendo éste proporcional al porcentaje correspondiente.

El ángulo se calcula aplicando proporciones o bien una regla de tres simple, considerando el ángulo total de 360° que se corresponde con el 100% de los datos observados.

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \cdot f_a$$



Histogramas

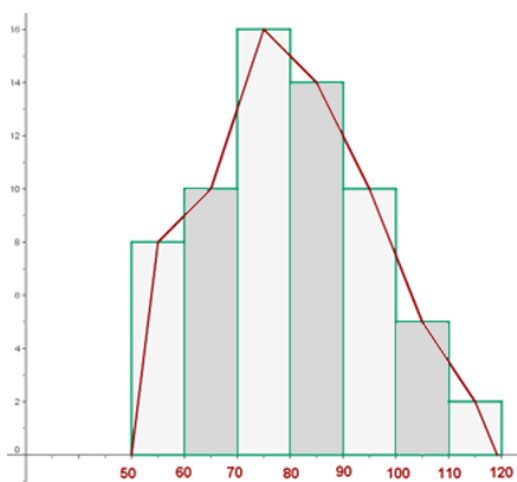
Un histograma es una representación gráfica de una variable en forma de barras. Se utiliza para variables continuas o para variables discretas con un gran número de datos, y que se han agrupado en clases. En el eje de abscisas se construyen rectángulos que tienen por base la amplitud del intervalo y, por altura, la frecuencia absoluta de cada intervalo. La superficie de cada barra es proporcional a la frecuencia de los valores representados.

Ejemplo. El peso de 65 personas adultas viene dado por la siguiente tabla:

Intervalos	f_i	F_a	x_m
[50, 60)	8	8	55
[60, 70)	10	18	65
[70, 80)	16	34	75
[80, 90)	14	48	85
[90, 100)	10	58	95
[100, 110)	5	63	105
[110, 120)	2	65	115
Totales	65		

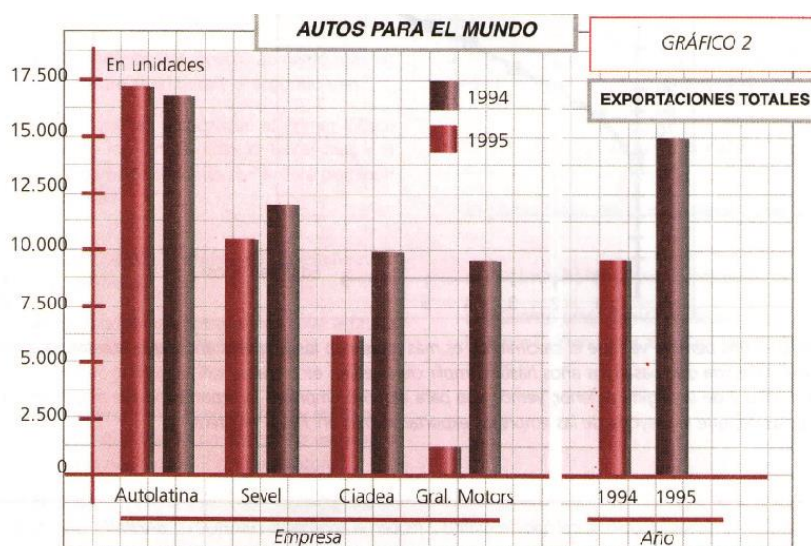
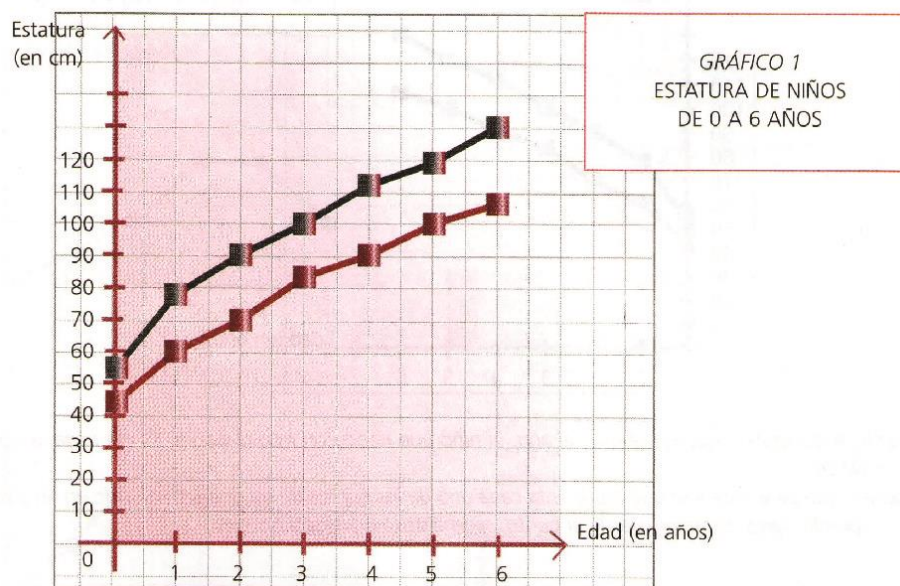
Polígono de frecuencia

Para construir el polígono de frecuencia se toma la marca de clase que coincide con el punto medio de cada rectángulo y luego unimos esos puntos con una línea.



Lectura y análisis de cuadros estadísticos

Los siguientes gráficos fueron extraídos de una revista y un diario.

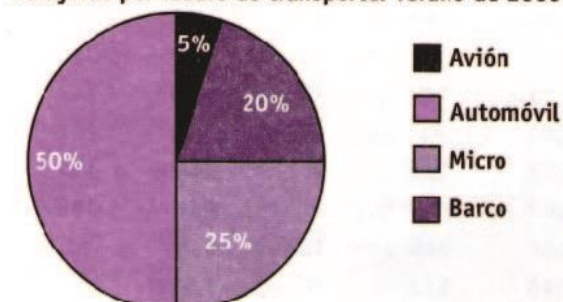


¿Qué información les da cada uno de los gráficos? Formulen algunas preguntas que puedan responderse a partir de estos gráficos.

Ejercitación Propuesta

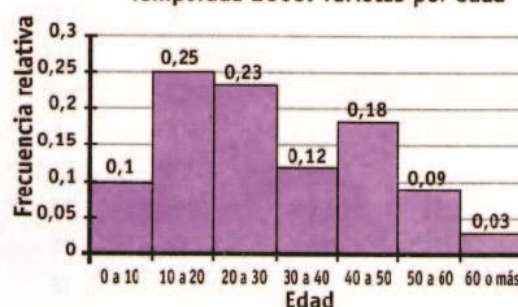
1. Observen los siguientes gráficos indicadores de la actividad turística en Playa Amarilla.

Pasajeros por medio de transporte. Verano de 2000



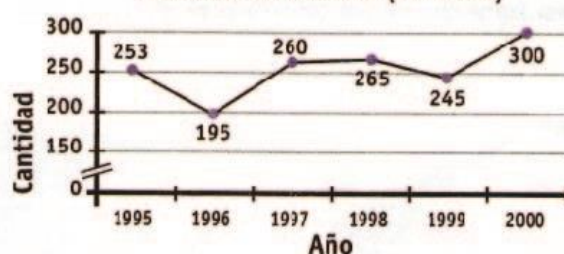
Fuente: Secretaría de Transporte

Temporada 2000. Turistas por edad



Fuente: Secretaría de Turismo

Cantidad de turistas (en miles)



Fuente: Secretaría de Turismo

- ¿Cuántos turistas arribaron a Playa Amarilla en el verano de 2000?
- ¿Cuántos de ellos lo hicieron en automóvil?
- ¿En qué porcentaje disminuyó la afluencia de turistas en 1996 respecto de 1995?
- ¿Cuántos turistas de 50 años o más arribaron a Playa Amarilla en el verano de 2000?
- ¿En qué año se dio el mayor incremento en la afluencia turística?
- ¿En qué porcentaje respecto del año anterior?

2. En la siguiente matriz de datos se observan los resultados de una investigación sobre el uso de Internet por parte de los usuarios que están abonados al servicio de una compañía.

Serv.	Ant.	Horas	Serv.	Ant.	Horas	Serv.	Ant.	Horas
TE	2,88	135	TE	1,84	213	TE/FI	1,61	141
TE/FI	1,19	98	TE/FI	1,98	62	TE	1,09	211
TE/FI	2,89	212	TE/FI	2,29	183	FI	2,50	144
TE	1,31	245	TE	1,86	81	TE	2,20	231
TE	2,60	120	TE/FI	1,53	181	TE	0,99	117
TE	2,68	99	TE	0,02	147	FI	0,04	196
TE	0,05	133	TE	0,66	215	TE	1,20	81
TE	1,94	54	TE	0,40	242	TE	1,51	33
TE/FI	1,88	179	TE	1,49	161	TE	0,59	134
TE	0,66	113	TE/FI	0,27	87	FI	2,32	244

Serv: tipo de servicio. **TE:** línea telefónica **TE/FI:** línea telefónica + fibra óptica. **FI:** cable de fibra óptica.

Ant: tiempo (en años) que lleva abonado a la compañía. **Horas:** horas que estuvo conectado en el último mes.

- Construyan un gráfico circular con la distribución porcentual de la variable tipo de servicio (realicen previamente la tabla de frecuencias).
- Construyan un histograma de frecuencias con la cantidad de horas que los usuarios estuvieron conectados a Internet durante el último mes. Realicen previamente la tabla de frecuencias utilizando 5 clases con un ancho de intervalo de 50, teniendo como límite inferior de la primera clase al 0.
- Construyan un gráfico circular de la distribución de los clientes por categoría (A: menos de un año de antigüedad; B: entre 1 y 2 años de antigüedad; C: más de 2 años de antigüedad). Realicen previamente la tabla de frecuencias.

3. Observen el siguiente gráfico que representa los trasplantes de riñón realizados en 1996 y 1997 en la provincia de Buenos Aires.

Transplantes renales en la provincia de Buenos Aires



- Analicen si el tipo de gráfico elegido es el adecuado.
- Si consideran incorrecta la elección, realicen un nuevo gráfico para la variable.

4. La siguiente tabla representa la producción de las principales frutas en la provincia de Buenos Aires, campañas 1990-1991 a 1994-1995.

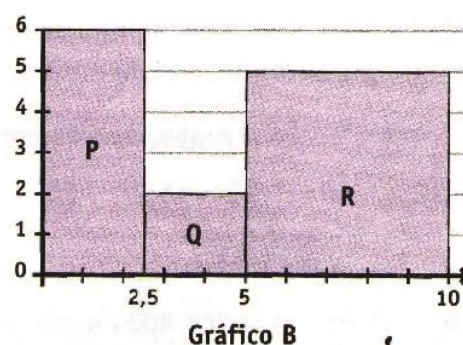
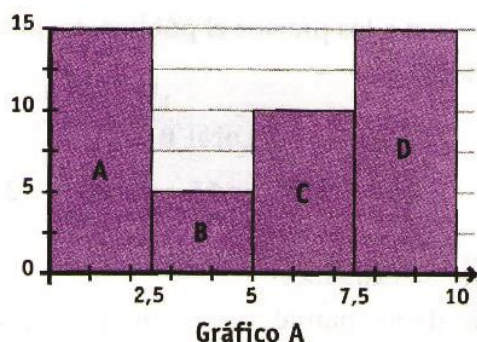
Campaña	Principales frutas			
	Naranjas	Limones	Mandarinas	Pomelos
	toneladas			
1990-1991	58 538	4 050	5 510	3 692
1991-1992	98 750	8 680	7 445	5 720
1992-1993	110 340	8 860	7 670	5 720
1993-1994	122 975	8 700	7 750	5 500
1994-1995	124 804	8 845	7 862	5 365

Fuente: INDEC.

- Construyan un gráfico de líneas para comparar la evolución de la producción de limones y la de mandarinas.
- Construyan un gráfico de líneas para representar la evolución de la producción de frutas utilizando el total de la producción de cada año.
- Construyan un gráfico circular con la distribución de la producción por tipo de frutas en la campaña 1994-1995.
- ¿Cuál de las producciones de frutas manifiesta mayor crecimiento en la última campaña respecto de la primera?

5. Observen la tabla y los dos gráficos contruidos a partir de ella. El primero tiene rectángulos de igual base y la altura proporcional a la frecuencia absoluta. El segundo tiene rectángulos de distinta base (los intervalos no tienen la misma longitud) y área proporcional a la frecuencia absoluta.

Intervalo	f_i
[0 ; 2,5]	15
[2,5 ; 5]	5
[5 ; 7,5]	10
[7,5 ; 10]	15



- ¿Cuál de los dos gráficos les resulta de más clara lectura?
- A partir de los datos de la tabla analicen la forma de construir el gráfico B.

6. Las estaturas en cm de una muestra de 35 varones adultos, son las siguientes: 156, 159, 160, 163, 164, 165, 165, 166, 168, 170, 171, 171, 172, 172, 173, 173, 174, 175, 175, 176, 177, 178, 178, 179, 180, 181, 182, 182, 183, 184, 185, 185, 187, 187, 188.

- a) Encuadren estos datos en 5 clases de 7 cm. de ancho de intervalo, con 154 como límite inferior de la primera clase.
- b) Construyan la correspondiente tabla con las frecuencias y porcentajes.
- c) Dibujen el histograma.

7. Se hizo un estudio, sobre los grupos sanguíneos, y estos fueron los resultados:

Grupo sanguíneo	A	B	AB	O
Nº de personas	390	470	330	180

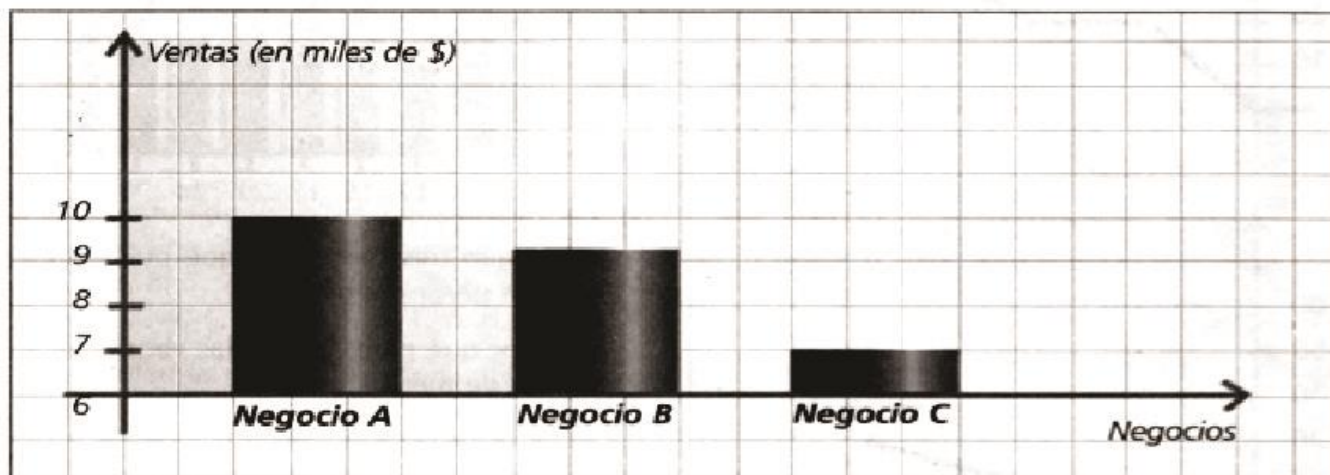
- a) ¿Qué porcentaje le corresponde a cada grupo sanguíneo?
- b) Tracen un gráfico circular.

8. El profesor de educación física de la escuela pesó a los alumnos de un curso y anotó los siguientes registros : 50, 40, 48, 47, 56, 39, 49, 42, 52, 38, 41, 58 46, 37, 47, 41, 50, 45, 38, 49, 64, 35, 52, 48, 51, 44, 46, 39, 43, 54, 48, 56, 47, 40, 63, 59, 43, 55, 46, 50.

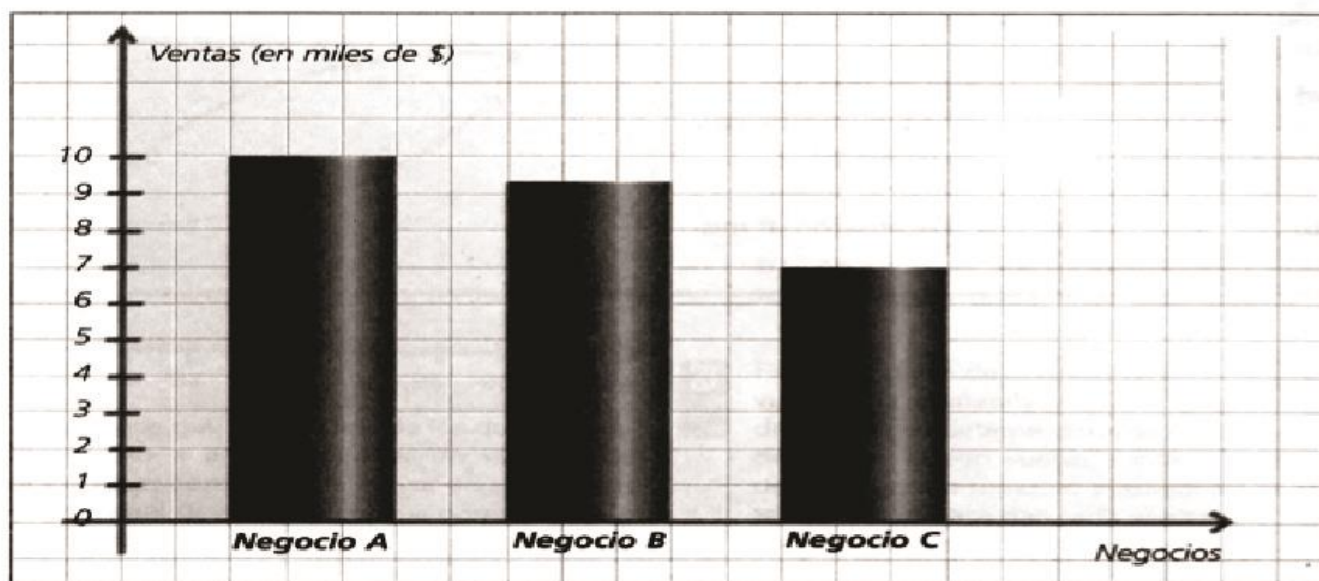
- a) ¿Cuál es la población?
- b) ¿Qué clase de variable es?
- c) Calculen la amplitud de la variable.
- d) Realicen la tabla de frecuencias absolutas y relativas.
- e) Realicen un gráfico de barras.

¿Algunos gráficos son mentirosos?

En el siguiente gráfico se representa la cantidad de ventas de tres negocios diferentes, todos dedicados al mismo ramo.



¿Es verdad que, según el gráfico, el negocio C vendió muy poco en comparación con el negocio A? ¿Por qué? Observen que si miramos solamente “el dibujo” (las barras que aparecen en el gráfico) parecería ser cierto que C vendió muy poco. Pero, si analizamos el eje vertical, vemos que no comienza en 0 sino en 6. ¡Nos están mostrando solamente una parte del gráfico! El gráfico completo es:



¿Les parece que es verdad que C no vendió casi nada?

Cuando se leen gráficos hay que prestar atención a la escala que figura en cada uno de los ejes.

La estadística en los medios

Si bien uno de los objetivos principales de la estadística es proveer herramientas para simplificar la información y hacerla accesible a mayor cantidad de gente, esto no ocurre con mucha frecuencia. Las herramientas estadísticas son usadas frecuentemente para manipular la visión de los lectores sobre la realidad. Algunos ejemplos son los siguientes:

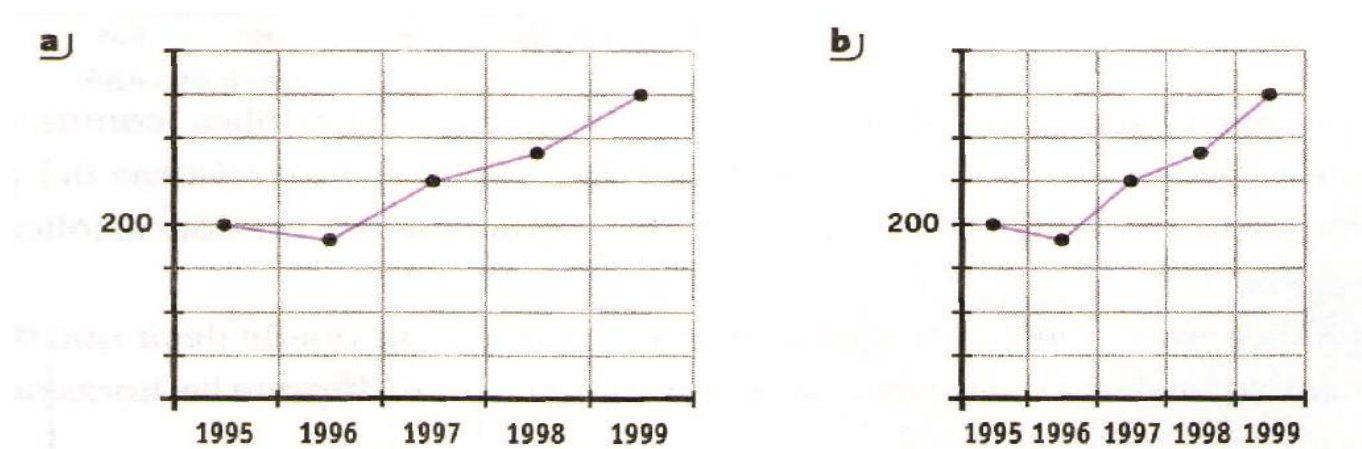
El mal uso intencionado de los porcentajes y los valores absolutos

Para comprender el alcance de esta manipulación pondremos algunos ejemplos y luego, entre paréntesis, la aclaración acerca de la información omitida.

“El año pasado desaprobaron 20 alumnos y este año 40. Esto implica que el índice de desaprobación se incrementó en un 100%”. (El año pasado había 150 alumnos y este año hay 480).

“Entre los que se enfermaron, el 75% debió ser internado en terapia intensiva. Es necesario que las autoridades decreten una emergencia sanitaria”. (Se declararon 4 casos en una ciudad de 100000 habitantes, entre los cuales 3 fueron internados en terapia intensiva).

La modificación de la escala de los gráficos produce distorsión en la percepción de los datos.



¿Cuál de los dos gráficos sugiere mayor velocidad de crecimiento?

Bibliografía

“MATEMÁTICA”. Funciones y Estadística de Irene Marchetti de De Simone y Margarita García de Turner – aZ Editora S.A.

“MATEMÁTICA”. Funciones 1 de Silvia V. Altman, Claudia R Comparatore y Liliana Kurzrok – Editorial Longseller S.A.

“MATEMÁTICA”. Números y Sucesiones de Silvia V. Altman, Claudia R Comparatore Liliana E. Kurzrok – Editorial Longseller S.A

Carpeta de Matemática 2 Polimodal – AIQUE, 2005

Libros de texto de Matemática: 1° año Polimodal Editorial Santillana, Comunicarte, Aique.

Páginas web: Vitutor, Sector Matemática.